Cours 5.1
8.10.24

Rappel (inversibilité d'une matrice)

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tq $AB = I_n = BA$.

Ex : matrices élémentaires sont inversibles

Critères d'inversibilité : voir Méga théorème

notamment : A est inversible $\Leftrightarrow$ A est produit de matrices élémentaires
[point n)]

Addendum :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $A' \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ la matrice obtenue en faisant une seule opélém. sur les lignes de A.

Alors $A' = E \cdot A$

où E est la matrice élém. $(m\times m)$ obtenue en faisant la même opélém. sur les lignes de I_m

Méthode pratique pour savoir si A est inversible et calcul de A^{-1}

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

1) On écrit $(A \mid I_n)$

2) opélém sur $(A \mid I_n)_{n \times (2n)}$

jusqu'à obtenir

$$(R \mid A')$$

où R = la forme échelonnée réduite de A

3) Si $R \neq I_n$ alors A n'est pas inversible

Si $R = I_n$ alors A est inversible

et $A^{-1} = A'$.

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{l_3 \to l_3 - a l_1}{\overset{l_2 \to l_2 - l_1}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \quad l_3 \to l_3 + l_2 \quad \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -1-a & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow$$

si $a \neq 1$

$l_2 \to \frac{l_2}{a-1}$

$2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & -1-a & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad l_3 \to \frac{l_3}{a-1}$$

si $a \neq -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2) & -\frac{a+1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad l_3 \to \frac{l_3}{-(a+2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+1}{(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{(a-1)(a+2)} & -\frac{1}{(a-1)(a+2)} \end{array}\right)$$

<u>Not</u>: $p(a) = (a-1)(a+2)$

Constat : si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

alors A est inversible $\left(\begin{array}{l} 3 \text{ pivots} \\ 3 \text{ colonnes} \end{array}\right)$

On continue les calculs :

$\rightsquigarrow$

$$l_2 \to l_2 + l_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{p(a)} & \frac{a+1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} \end{array}\right)$$

calculs $\rightsquigarrow$

$$p(a) = (a-1)(a+2)$$

$$l_1 \to l_1 - a\, l_3$$

$\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{p(a)} & \frac{a}{p(a)} & \frac{a}{p(a)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{p(a)} & \frac{a+1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} \end{array}\right)$$

$$l_1 \to l_1 - l_2$$

$\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/p(a) & -1/p(a) & a+1/p(a) \\ 0 & 1 & 0 & -1/p(a) & \frac{a+1}{p(a)} & -1/p(a) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+1}{p(a)} & -\frac{1}{p(a)} & -1/p(a) \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ si $a \neq 1$, $a \neq -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

$p(a) = (a-1)(a+2)$ est une quantité qui détermine si A est inversible ou non

càd A inversible $\Leftrightarrow$ $p(a) \neq 0$.

But prochain chap :

généraliser cette quantité ...

Chap. 3 : Déterminants (Lay p.175)

§3.1 Intro :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$$

posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, alors

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

donc A est inversible $\Leftrightarrow$ $ad-bc \neq 0$

et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

But : généraliser au matrices $n \times n$
càd "construire" une fonction
appelée "déterminant"

$$\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longmapsto \det(A)$$

qui détecte l'inversibilité de A

càd A inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Notations/notions

Soit $A = (A_{i,j}) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

A est triangulaire inférieure si $A_{i,j} = 0$ pour $i<j$

A est triangulaire supérieure si $A_{i,j} = 0$ pour $i>j$

A est triangulaire si elle est triang. sup
ou triang. inférieure.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ inf. $a_{12} = 0$ $a_{13} = 0$ $a_{23} = 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sup.

Nouvelle construction

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $n \geq 2$

et fixons $1 \leq i, j \leq n$

On dénote par

$$A^{(i,j)} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$$

la matrice obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Rem : il y a n^2 matrices $A^{(i,j)}$

Théorème-définition (du dét)

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, on définit $A = (a_{i,j})$

pour toute ligne i

$$\boxed{\det(A) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det(A^{(i,j)})} \quad M$$

c'est le développement du dét. selon la ligne i

Rem : cela ne dépend pas du choix de i

et on a aussi pour tout $1 \leq j \leq n$ (colonne)

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A^{(i,j)})}$$

développ. du dét. selon la colonne j.

Morale : Ces formules disent comment calculer le dét. d'une matrice $n\times n$ comme somme de n déterminants de matrices $(n-1)\times(n-1)$

Ainsi un dét 2×2 (3×3) (4×4)

se ramène au calcul de 2 dét. 1×1

(3 dét 2×2)

(4 dét 3×3)

<u>ex</u> :

rebaptère

1) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\downarrow}{=} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

1ère ligne

$$\overset{\downarrow}{=} \underbrace{(-1)^{1+1}}_{j=1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(a_{21})$$

$i=1$

rebaptère

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \overset{\downarrow}{=} ad-bc.$$

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$j=1$

$(-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(-1)^{1+3} \cdot (-1) \det\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$

$$= 3 - 0 + (-1)(-5) = 8.$$

3) Autre notation : $\det(A) = |A|$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot |A^{(3,1)}| + (-1) \cdot 0 \cdot |A^{(3,2)}| + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{A^{(3,3)}} + (-1)^{3+4} \cdot 0 \cdot |A^{(3,4)}|$$

$i = 3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

ci-dessus.

<u>Morale</u> : il convient de développer selon une ligne la plus simple possible (colonne aussi).

Conséquence : le déterminant d'une matrice
1) triangulaire est facile à calculer

2) si A possède une ligne ou une colonne nulle alors $\det(A) = 0$

Super-Théorème (Thm 2, 4, 5, 6)

$A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, alors

1) Si A est triangulaire, alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$ = produit des coeff. diag.

2) $\det(A) = \det(A^T)$

en gros, pour les déterminants, on peut aussi faire des opélém. sur les colonnes si on veut.

⚠ cela change l'ens. solution mais pas le dét.

3) A est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

rajout au méga-thm : o)

et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

4) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

en particulier

$$\det(AB) = \det(BA)$$

<u>Rem</u> : 3) dit que

les colonnes de A sont lin. indép. $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

les colonnes de A sont lin <u>dépendantes</u> $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

<u>p.ex</u> : si 2 colonnes sont égales alors $\det(A) = 0$
(2 lignes)

<u>suite du superthm : jeudi</u>

Merci ☺